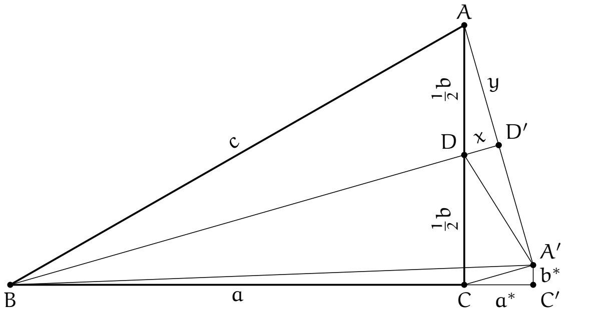
Obliczanie sumy pitagorejskiej: $\sqrt{a^2+b^2}$

W podręczniku D. E. Knutha *The METAFONTbook* na stronie 66 znajduje się intrygujące zdanie: *It is better to use Pythagorean addition than to calculate $\sqrt{a^2+b^2}$, because the computation of a^2 and b^2 might produce numbers that are too large even when $a{+}{+}b$ is rather small.* Jak to możliwe, żeby można było obliczyć sumę pitagorejską bez podnoszenia do kwadratu i pierwiastkowania? Okazuje się, że METAFONT wykorzystuje elegancką konstrukcję geometryczną (zaczerpniętą z: Cleve Moler i Donald Morrison, *IBM Journal of Research and Development* **27** (1983), 577–581), dzięki której obliczanie sumy pitagorejskiej sprowadza się do prostej acz niezwykle efektywnej iteracji. Sytuację przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Niech ABC będzie trójkątem prostokątnym o kącie prostym w wierzchołku C, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, i niech punkt D dzieli odcinek CA na pół; niech dalej punkt A' będzie odbiciem punktu A względem osi BD, a D' – środkiem odcinka AA'. Zauważmy, że trójkąt $A'BC'$ ma taką samą przeciwprostokątną jak trójkąt ABC. Okazuje się, że kluczowe dla wyznaczenia tej przeciwprostokątnej wielkości $a^* = CC'$ i $b^* = C'A'$ dają się obliczyć za pomocą elementarnych operacji arytmetycznych: dodawania, mnożenia i dzielenia. Nietrudno sprawdzić, że iterowanie tej konstrukcji daje w przejściu granicznym $b^* \to 0$, $a{+}a^* \to c$.

Aby wyznaczyć a^* i b^* wprowadźmy dwie wielkości pomocnicze: $x = DD'$ i $y = AD'$. Z podobieństwa trójkątów DBC i DAD' otrzymujemy zależności:

$$\frac{x}{\frac{1}{2}b} = \frac{\frac{1}{2}b}{\sqrt{a^2+\frac{1}{4}b^2}}, \quad y = \sqrt{\tfrac{1}{4}b^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\frac{1}{2}b^2}{\sqrt{4a^2+b^2}}, \quad y = \frac{ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}. \tag{1}$$

Obliczając powierzchnię trójkąta CAA' (podobnego do trójkąta DAD') na dwa sposoby otrzymujemy natychmiast wielkości a^* i b^*:

$$a^*\, b = 2x\, 2y \quad \Rightarrow \quad a^* = \frac{2ab^2}{4a^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad b^* = \sqrt{4x^2 - a^{*2}} = \frac{b^3}{4a^2+b^2}. \tag{2}$$

Równania (2) można przepisać w dogodniejszej do obliczeń postaci:

$$a^* = \frac{2ar^2}{4+r^2}, \quad b^* = \frac{br^2}{4+r^2}, \tag{3}$$

gdzie $r = b^2/a^2$. Z powyższych rozważań wyłania się następujący algorytm iteracyjny o zdumiewająco szybkiej zbieżności:

dane: przyprostokątne: a, b; założona dokładność: ε
wynik: $c = \sqrt{a^2+b^2}$ (dla „oszczędności” wynik można by gromadzić w zmiennej a)
  $c \leftarrow a$
  powtarzaj {
    $r \leftarrow b/c$; $r \leftarrow r * r$; $r \leftarrow r/(4+r)$
    jeśli $r \leqslant \varepsilon$ **przerwij**
    $c \leftarrow c + 2 * c * r$; $b \leftarrow b * r$
  }

Przykładowo, dla $a = 3$ i $b = 4$ już po pierwszej iteracji algorythm osiąga dokładność względną 3×10^{-2}, po drugiej – 8×10^{-6}, a po trzeciej – 1×10^{-16}. Na ogół można zakładać, że na większości procesorów wielokrotne dzielenie przez liczbę $\geqslant 4$ prowadzi w końcu (bez sygnału błędu) do wyniku 0; w praktyce można więc przyjąć, że $\varepsilon = 0$. Oczywiście „rasowa” implementacja powinna zadbać o odpowiednie skalowanie wyliczanych przez algorytm wielkości, by przeciwdziałać kumulacji błędów zaokrągleń (por. `mf.web`, sekcje 107–111 oraz 124 i nast.), ale algorytm jest tak sprawny, że i bez takich ulepszeń warto go wykorzystać, jeśli tylko nadarzy się po temu okazja.

◇ Bogusław Jackowski, BOP s.c.
B.Jackowski@GUST.org.pl